ראינו את מבחני השורש (קושי) והמנה (ד'אלאמבר): L

לא להתבלבל הין התנאים כאן ובמבחן ההשוואה הגבולי

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{n}{n+1} = \lim \frac{1}{1+1/n} = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Rightarrow \lim \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1$$

הכללה:

$$\exists L < 1 :$$

$$\exists N : \forall n > N \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < L$$

$$q = \frac{L+1}{2}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{לבדוק גם מקרה } L = \text{כלום} \\ \exists N : \forall n > N \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \end{array}}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(\ ) = \lim_{n\to\infty} \sup\left(\sqrt[n]{a_n}\right) = L < 1$$

דוגמה:

$$\sum a_n$$

$$a_n = n^{3/n}(0.9)^n$$

$$\sqrt[n]{a_n} = n^{3/n} \cdot 0.9 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.9 < 1$$

כלומר נתכנס

דוגמה:

$$\{a_n\} = \{\overset{a_1}{1}, \overset{a_2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \dots\}$$

$$S_{2n} = 2 \cdot \tilde{S}_n$$

$$S_{2n+1} = 2\tilde{S}_n + \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$a_n = \begin{cases} 2^{-\frac{n-1}{2}} & n \text{ אי-זוגי} \\ 2^{-\frac{n-2}{2}} & n \text{ זוגי} \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{\left(2^{-\frac{n-1}{2}}\right)} = \left(2^{-\frac{n-1}{2}}\right)^{\frac{1}{n}} = 2^{-\frac{n-1}{2n}} = 2^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \dfrac{2^{-\frac{n-1}{2}}}{2^{-\frac{n-1}{2}}} = 1 & n \text{ אי-זוגי} \\ \dfrac{2^{-\frac{n}{2}}}{2^{-\frac{n-2}{2}}} = \dfrac{1}{2} & n \text{ זוגי} \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} 2^{-\frac{n-1}{2n}} & n \text{ אי-זוגי} \\ 2^{-\frac{n-2}{2}} & n \text{ זוגי} \end{cases}$$

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

דוגמה: נתון טור התלוי בפרמטר חיובי, עבור אילו ערכים של הפרמטר הטור מתכנס? $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{x^n}{n^2}} = \underbrace{\frac{n^2}{(n+1)^2}}_{\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2}} x \xrightarrow[n\to\infty]{} x$$

אם $x > 1$ הטור מתבדר

אם $x < 1$ " מתכנס

$$\sqrt[n]{\frac{x^n}{n^2}} = n^{-\frac{2}{n}} \cdot x \xrightarrow[n\to\infty]{} x$$

נבדוק x=1: $\sum \frac{1}{n^2}$ מתכנס

תזכורת מאינפי׳:

הגדרה: סדרה תיקרא סדרת קושי אם היא מקיימת:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N: \quad \forall n,m > N \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$$

משפט (קריטריון קושי להתכנסות סדרות): סדרה מתכנסת אם״ם היא סדרת קושי

$$|a_n - a_m| = |(a_n - L) + (L - a_m)| \leq |a_n - L| + |a_m - L| = 2\varepsilon$$

אי שוויון המשולש

סדרת קושי => קיים גבול:
הסדרה חסומה.
קיימת לה תת סדרה מתכנסת (בולצנו-ויירשטראס).
הסדרה עצמה מתכנסת לאותו הגבול.

למה להגדיר כמושג חדש?
אין צורך לחשב את הגבול - בחינה של התכנסות שתלויה בסדרה עצמה בלבד

ניתן להכליל את המושג של גבולות למרחבים אחרים/לבחון האם קיימת התכנסות בהם בהכרח

$$3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, \ldots$$

להגדיר מרחב של כל סדרות קושי, מודולו יחס שקילות

מחר בחמש: שעת קבלה

תרגיל 1.5 קבעו האם הטורים מתכנסים או מתבדרים (אין צורך לחשב את הסכום).

(א) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$, (ב) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^6}$, (ג) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$, (ד) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$,

(ה) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$, (ו) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3}$, (ז) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}$, (ח) $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan^n\frac{1}{n}$.

תרגיל 1.6 בדקו שהטורים הבאים מתכנסים, וחשבו את סכומם.

(א) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$, (ב) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$, (ג) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9n^2+3n-2}$, (ד) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{7}{3^n}-\frac{6}{(n+3)(n+4)}\right)$,

(ה) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\sqrt[5]{n}-\sqrt[5]{n+1}}{\sqrt[5]{n^2+n}}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\sqrt{2})^{n+1}}{\sqrt[3]{21^{n-1}}}$, (ו) $\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{(n-2)(n-3)}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^{n+1}}{\sqrt[4]{133^{n-1}}}$.

תרגיל 1.7 חקרו את ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(nx)$ לכל x ממשי.

תרגיל 1.8 השתמשו בקריטריון קושי להתכנסות סדרות כדי להוכיח שהטורים הבאים מתכנסים (כלומר, הראו שסדרות הסכומים החלקיים מהוות סדרות קושי):

(א) $\frac{\cos(x)-\cos(2x)}{1}+\frac{\cos(2x)-\cos(3x)}{2}+\ldots+\frac{\cos(nx)-\cos((n+1)x)}{n}+\ldots$,

(ב) $\frac{\cos(x)}{1^2}+\frac{\cos(x^2)}{2^2}+\ldots+\frac{\cos(x^n)}{n^2}+\ldots$.

תרגיל 1.9 השתמשו בקריטריון קושי להתכנסות סדרות כדי להוכיח שהטורים הבאים מתבדרים:

(א) $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots$, (ב) $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_n$ $\quad \forall\varepsilon>0\ \exists N:\forall n,m>N$

$|S_n-S_m|<\varepsilon$

$\left|\sum_{k=m+1}^{n}a_n\right|=\left|\frac{\cos((m+1)x)-\cos((m+2)x)}{m+1}\right.$ בהנ' $m<n$

$+\ldots+\frac{\cos(nx)-\cos((n+1)x)}{n}=\frac{\cos((m+1)x)}{m+1}-\frac{\cos((n+1)x)}{n}+$

$\leq\left|\cos((m+2)x)\underbrace{\left(\frac{1}{m+2}-\frac{1}{m+1}\right)}_{\frac{-1}{(m+1)(m+2)}}+\ldots+\cos(nx)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}\right)\right|$

$$\left|\frac{\cos((n+1)x)}{n+1}\right| + \left|\frac{\cos((n+1)x)}{n}\right| + \frac{|\cos(\ )|}{(n+1)(n+2)} + \frac{|\cos(\ )|}{(n+2)(n+3)} + \dots + \frac{|\cos(\ )|}{n(n-1)} \le$$

$$\le \left|\frac{\cos((n+1)x)}{n+1}\right| + \left|\frac{\cos((n+1)x)}{n}\right| + \underbrace{\underbrace{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}_{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots + \underbrace{\frac{1}{n(n-1)}}_{\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}}}_{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}} \le \frac{4}{N} < \varepsilon$$

הטור ההרמוני עם הסימנים המתחלפים

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\dots = \ln 2$$

$$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\dots$$

מתבדר

יהי N, נבחר n: $N<3n$ ואז:

$$S_{6n}-S_{3n} =$$

$$\sum_{k=3n+1}^{6n} a_n = \frac{1}{3n+1} + \underbrace{\frac{1}{3n+2}-\frac{1}{3n+3}}_{>0} + \dots + \frac{1}{6n-2} + \underbrace{\frac{1}{6n-1}-\frac{1}{6n}}_{>0} >$$

$$\underbrace{\frac{1}{3n+1}+\dots+\frac{1}{6n-2}}_{n \text{ איברים}} > \frac{n}{6n} = \frac{1}{6}$$

נבחר $\varepsilon=\frac{1}{6}$ וקריטריון קושי לא מתקיים

כל אחד מהם גדול שווה: $\frac{1}{6n-2}$

המצב היחיד שבו אי אפשר להשתמש בקריטריונים של טורים חיוביים זה אם יש טור שיש לו
אינסוף איברים חיוביים ואינסוף איברים שליליים

הגדרה: יהי $\sum a_n$ טור נאמר שהטור **התכנס בהחלט**

אם הטור $\sum |a_n|$ התכנס.